L'EDUCATORE
Formazione e aggiornamento

Il problema nella pratica matematica educativa

di **Bruno D'Amore** e **Patrizia Sandri**
Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica di Bologna.

1. PREMESSA

1.1. La ricerca: motivazioni, modalità e contenuti

Nell'ambito del nostro Nucleo si è sviluppata l'esigenza di condurre una ricerca sulle strategie ingenue che i bambini inventano al momento di dover risolvere i problemi.
Ci preme sottolineare, senza entrare in dettagli sulla distinzione ben nota tra «problemi ed esercizi», che non intendiamo occuparci di questi ultimi pur riconoscendo ad essi, in particolari occasioni didattiche, qualche validità.
Dato che proponiamo ai bambini dei problemi, è anche ovvio che le strategie che i bambini creano per affrontarli non sono sempre dettate dalle loro competenze formali (come invece capita quasi sempre con gli esercizi). È per questo che stiamo molto attenti alle strategie che abbiamo definito «ingenue».
In definitiva, il titolo complessivo della nostra ricerca (della quale questo articolo* è solo una parte) è il seguente: «Strategie ingenue *nella risoluzione dei problemi*».
Un bambino, posto di fronte ad un problema, se è sufficientemente motivato, una volta letto il testo e fattosi un'immagine mentale della *situazione descritta, tende a mettere* in moto tutte le conoscenze che possiede, sia esperienziali, sia formali. Se c'è una buona disponibilità verso la matematica e non sono già scattate forme inibitorie, egli attiva una trasformazione che parte dalle sollecitazioni provocate dalla comprensione del testo e che prosegue con una successione di modalità operative (più o meno consapevoli), avendo *come scopo il raggiungimento* di una risposta soddisfacente. Nella pratica scolastica, però, non sempre il bambino è libero di ricorrere a questo spontaneo passaggio; *nella scuola la spontaneità è spesso* soffocata, anche se nei modi più che nelle norme, richiedendo al bambino di trasferire le sue capacità verso attività non di risoluzione ma di applicazione di stereotipi operativi. In questo caso non è possibile parlare di ingenuità: quel che manca è un atteggiamento libero di ricerca di soluzione del problema; emerge invece un vero e proprio condizionamento *ad indirizzare* la propria razionalità nell'individuare in quale «tipo» di problema già conosciuto si può incasellare quello proposto (talvolta, addirittura, questa analisi è suggerita esplicitamente).
È *quindi necessario chiarire che* cosa intendiamo per «strategie ingenue».
È ben noto che sulle abilità:
— relative all'apprendimento di *concetti (livello zero o concettuale)*
— relative all'apprendimento di strategie (comportamenti) (livello uno o comportamentale)
formatesi:
— fuori dalla scuola, oppure
— all'interno della scuola, ma in attività non curricolari
(in un colpo solo, diciamo: abilità esperienziali) si innestano sollecitazioni didattiche specifiche e intenzionali *in entrambi i livelli (zero ed uno)*; tutte possono incidere nel profondo e diventare vere e proprie competenze, oppure sono solo pseudo-apprendimenti *epidermici, di superficie, quindi risultano* essere «competenze» solo quel tanto che basta ad un segmento di vita scolastica e poi, fatalmente, si perdono.
In ambito scolastico (l'ambiente identificabile come scuola, qualsiasi cosa esso sia: la presenza di insegnanti, l'edificio, l'organizzazione, la struttura, il tipo di relazioni sociali,...) sembra che il riconoscimento sociale vada a quell'*allievo che mostra di saper nascondere* gli apprendimenti di tipo E per mostrare invece di saper fare uso di quelli di tipo A.
Come è ovvio, apprendimenti A,

* *Questo articolo è già uscito, in forma rimaneggiata e ridotta dalla redazione, su un'altra rivista italiana.*

	Livello concettuale (0)	Livello comportamentale (1)
Esperienza profonda (E)	E0	E1
Acquisizione epidermica (A)	A0	A1

se interiorizzati e fatti propri, possono diventare E, ma non è detto che ciò capiti; anzi: la pratica scolastica contrapposta a quella dell'esperienza quotidiana mostra che, non appena termina la fase nella quale è fatto obbligo di mostrare le conoscenze A, l'allievo ritorna subito a far uso di competenze E.

Come far emergere, nell'ambiente-scuola, le reali competenze interiorizzate dell'allievo, rendendolo disponibile a mostrarle? In *(quasi) tutte le occasioni* di relazioni scolastiche (interrogazioni, compiti a casa ed in classe, test, prove, saggi, ma anche conversazioni,...) l'allievo ha indotto il convincimento che è l'apprendimento A che deve mostrare; anzi, *quando lo si sollecita a quello E, si mostra* incredulo o dubbioso.

Quando vi si riesce, l'emergere di fattori E si rivela sempre come qualche cosa di sorprendente, appunto perché si tratta di acquisizioni non formali, non sorrette dal «matematichese» *(linguaggio non* naturale con il quale l'allievo è indotto in classe a far matematica).

Intendiamo per strategie «ingenue» quelle di tipo E1 messe però in atto in ambiente scolastico quando, attraverso un opportuno contratto didattico esplicito, si stabilisce che ciò è lecito e l'allievo sa di poter esprimere davvero se stesso e non camuffare le proprie competenze reali in un linguaggio ed in forme non suoi. «Ingenuo» traduce il termine «naïf» che ha una sfumatura che rende meglio l'idea; potremmo pensare all'emergere di un'espressione di *una competenza interna non raffinata* dal rapporto linguistico con il docente, grezza. Essa si rivela interessante sia per la forma linguistica nella quale avviene (talvolta non verbale), sia per le immagini che fornisce, sia per il contenuto (sia esso di livello zero o uno).

Sulla ricerca, ancora in atto, ma di portata vastissima (perché *ha di* gran lunga superato i confini che inizialmente ci eravamo posti) riferiremo a lungo ed in modo molto più preciso altrove; in questo articolo ci vogliamo limitare a mettere in evidenza alcuni esempi salienti che potrebbero interessare gli insegnanti.

Ma per evitare interpretazioni *ambigue e di essere fraintesi* dobbiamo ancora mettere in evidenza alcuni punti.

Abbiamo elaborato a tavolino alcune decine di testi di problemi e, grazie all'aiuto di collaboratori facenti parte del Nucleo (e che *hanno messo a nostra disposizione* la loro classe), li abbiamo proposti personalmente ai bambini; i risultati di queste prime prove NON sono stati conteggiati e quindi non fanno parte delle statistiche che daremo più avanti; questa *prima tornata di prove serviva* solo per valutare l'impatto linguistico del testo proposto; dalle domande o dalle richieste esplicite che abbiamo fatto ai bambini, sono emersi molti emendamenti ai testi. In qualche caso, come il lettore vedrà, *il testo* è un po' ripetitivo, inutilmente didascalico, ci sono dati inessenziali (come i nomi dei personaggi o le motivazioni per le quali una mamma prende caramelle al figlio), oppure ridondanze o incertezze stilistiche. Tutto ciò può infastidire *il* lettore adulto, ma è stato costantemente osservato, poi, che i testi elabora*ti in questo modo davano* un buon affidamento, forse anche perché i bambini successivamente coinvolti nell'esperienza fanno parte della stessa realtà sociale e geografica.[1] *Dunque, i testi che i lettori* vedranno, sono frutto di elaborazione comune, funzionale nella zona nella quale abbiamo operato.

Quando i testi sono diventati definitivi, abbiamo chiesto alle maestre membre del Nucleo di fungere da osservatrici in classi non loro, «prese a prestito» da insegnanti colleghe. Ciò ci ha permesso di avere centinaia di protocolli da analizzare, osservazioni scritte e registrazioni sonore.[2] Anche in questa seconda fase, in diverse occasioni gli autori sono stati presenti come osservatori; poiché le classi erano sempre divise a me*tà, il rapporto osservatori/bambi*ni è variato da 1:10 (ma solo in casi molto sporadici) fino a 4:10 (ed in tal caso si è riusciti a seguire quasi individualmente ogni bambino, prestando attenzione anche ad atteggiamenti orali e mimici, *non intenzionalmente comunicati*vi).

Naturalmente per garantire una buona conduzione della ricerca si dovrebbero dire tante più cose; ma, mentre rimandiamo altrove la descrizione, qui vogliamo subito arrivare ad esempi concreti. Non senza aver precisato altri punti, rapidamente:

— ogni bambino aveva un suo foglio personale formato A4 a quadretti già predisposto con la domanda, lo spazio adeguato per la risposta o per eventuali conti;

— i bambini erano invitati a scrivere a penna (per facilitare la let*tura anche di frasi poi cancellate e*

[1]. Su questo importante punto della costruzione socializzata del testo qui non ci dilunghiamo; esso costituisce, però, argomento aggiuntivo della *nostra ricerca*.

[2]. A volte l'insegnante di classe è stata presente nella fase di risoluzione dei problemi; in tal caso non si sono osservati solo i bambini *ma anche* i rapporti che si instauravano tra i bambini e le loro insegnanti. Su questo particolare punto abbiamo riferito in occasione del VI Incontro Internuclei di Garda (Vr) 11-13 aprile 1991: «Strategie "ingenue" nella risoluzione di "esercizi anticipati" e problemi e comportamento degli insegnanti».

studiare i conflitti fonte di ripensamenti);

— *in alcune occasioni i bambini* potevano far domande o anche scambiarsi idee tra loro (in gruppo *o in piccolo gruppo); ma la stragrande* maggioranza delle volte ognuno lavorava per conto proprio;

— i bambini sottoposti ai test venivano precedentemente classificati in «buoni» e «cattivi risolutori» di problemi in base alla segnalazione esplicita richiesta in anticipo alle insegnanti di classe; una parte della ricerca consiste nella valutazione di tale classificazione, ciò di cui non diremo in questo articolo; sembra che si possa comunque arguire, senza fornire dati statistici, che l'insegnante tende talvolta a considerare buono (cattivo) risolutore di problemi un buon (cattivo) esecutore di esercizi.

1.2. Prima di cominciare, due raccomandazioni

Abbiamo avuto modo di segnalare agli insegnanti banali avvertenze che devono avere nella formulazione dei testi dei problemi.

■ Prima raccomandazione: far uso solo di termini che i bambini conoscono.[3]
Di fronte al problema banale (per una quinta elementare):

> *Il cartolaio Giovanni compra 500 risme di carta a 10000 lire l'una e le rivende tutte a 18000 lire l'una; quanto guadagna?*

si ha un blocco di una parte dei bambini, anche quelli generalmente distinti come «buoni risolutori di problemi». Tale blocco può essere dovuto alla presenza di una parola ("risma") non nota o comunque non diffusa. È ovvio che il procedimento logico NON dipende dalla comprensione della parola in oggetto, ma il blocco c'è ed è presente anche tra gli adulti... Lo dimostra il fatto che abbiamo proposto a vari gruppi di insegnanti elementari il seguente problema:

> *Il cartolaio Giovanni compra 500 plucche a 10000 lire l'una e le rivende tutte a 13000 lire l'una; quanto guadagna?,*

ottenendo in taluni casi insistenti sollecitazioni di spiegare prima di tutto il significato di «plucca». Crediamo che l'esempio si commenti da sé.

■ Seconda raccomandazione: sappiamo che alcuni (troppi) insegnanti raccomandano ai bambini una strategia che, a loro avviso, dovrebbe aiutare i bambini stessi a risolvere un problema; tale strategia consigliata consiste in questo: «Quando vi viene proposto un problema, per prima cosa dovete scrivere *tutti* i dati e poi...». Abbiamo proposto il seguente problema:

> *Mario è un fornaio. Un giorno acquista 6 sacchi di farina da 5 kg l'uno a L. 850 il kg. Va nel suo negozio alle ore 21 del martedì e confeziona delle forme di pane comune. Ne confeziona 300 pezzi che pensa di rivendere tutti il giorno dopo a L. 400 l'uno. Finisce di lavorare il mercoledì mattina alle 4. Finalmente va un po' a letto ed alle 7 apre il negozio. Quante ore ha lavorato per confezionare il pane?*

Abbiamo visto molti bambini trascrivere *tutti* i dati e poi:

— in troppi casi abbandonare per evidente confusione.

— in altri casi NON servirsi di questa strategia per risolvere il problema.

Ora, fa parte della matematica (e, secondo noi, ha una rilevanza determinante) anche saper cogliere a colpo d'occhio i nessi, i dati essenziali, le vere domande, ecc. La matematica NON è solo trascrizione in formule, è anche saper cogliere al volo. E dunque è molto meglio allenare a vedere le cose in modo furbo, *creativo, intelligente*, piuttosto che artificiale, ripetitivo e piatto.

1.3. Zona delle esperienze

La zona della nostra esperienza è piuttosto vasta; va da Bologna città (zona ovest, Borgo Panigale) ad Osteria Grande (frazione di Castel S. Pietro Terme) ad Imola; le classi coinvolte sono state molte (una stima vera e propria è, a questo stato della ricerca, impossibile dato che la valutazione procede); i bambini coinvolti molte centinaia. Quando daremo delle percentuali (approssimate all'unità) le riferiremo allo stato attuale dello spoglio del materiale della ricerca. Ci hanno aiutato principalmente i seguenti membri del Nucleo: Mirtea Minarelli, Giovanna Montanari, Paola Pasotti e Maria Teresa Rambaldi, che ringraziamo.

2. PROBLEMI SUL TEMPO

2.1. Primi esempi

Proponiamo ora alcuni esempi che commenteremo; essi hanno a che fare, in maggiore o minore misura e profondità, con la nozione convenzionale del tempo. A questo proposito stiamo preparando molto materiale che vedrà presto la luce; qui ci limitiamo a dire, semplicemente, che a nostro avviso è necessaria una didattica specifica del tempo perché tale categoria è essenziale nella vita sociale di un individuo; la scuola sembra fornire indicazioni in gran parte solo implicite su questo importante e affascinante argomen-

[3]. A meno che il problema non abbia come scopo proprio quello di introdurre un termine nuovo. Vedremo in seguito alcune nostre prove in tal senso.

to, sebbene alcuni riferimenti specifici siano rintracciabili espressamente nei programmi del 1985 per la scuola elementare.
Vediamo il testo del primo problema:

Una formichina vuole effettuare un percorso quadrato partendo da A, passando per B, poi per C e per D, fino a tornare in A.

Il lato del quadrato è di 200 m. Durante il giorno, la formichina cammina per 200 m esatti; ma durante la notte un forte vento la riporta indietro della metà del percorso fatto durante il giorno. Se parte il lunedì mattina, cammina per tutto il giorno e arriva in B alla sera, durante la notte torna indietro a metà lato. Riparte il martedì mattina, e così via. Arriverà di nuovo in A, dopo aver fatto tutto il percorso... Quando?

Questo problema è stato proposto, in questa fase, solo nelle classi di V elementare.
Al bambino viene richiesto di seguire il percorso della formica procedendo ed indietreggiando (se vuole, concretamente, sostituendo all'immaginaria formica un proprio dito) lungo i lati del quadrato mentre (a voce alta o mentalmente) elenca i nomi dei giorni che si susseguono.

Occorre dunque che il bambino sappia sia distinguere chiaramente il dato spaziale da quello temporale sia considerare, contemporaneamente, l'uno e l'altro (poiché mentre retrocede spazialmente, il tempo continua a procedere). Non deve inòltre lasciarsi confondere dal dato «distrattore» fornito, e cioè dalla misura del lato del quadrato (200 m), inutile ai fini della risoluzione del problema.

— La risposta esatta (domenica sera) è stata data dallo 0%; ma un'indicazione più generica (comunque accettata) e cioè: domenica, è stata data dall'11% dei bambini.

— La risposta fra «8 giorni» o «lunedì prossimo» è stata data dal 37% e spiegata con il fatto che ogni lato del quadrato è percorso in 2 giorni.

— L'1% risponde «sabato» non tenendo conto dell'ultimo tratto.

— Il 27% si confonde e non ritorna indietro di mezzo lato tutte le notti. Probabilmente cio è dovuto ad una non chiara comprensione del testo e al fatto che occorre effettivamente una notevole concentrazione per non perdersi nel procedere e indietreggiare più volte. Il 6% infatti afferma che la formichina «non ce la fa» a tornare al punto A «perché ritorna sempre indietro», completamente confuso e sopraffatto dal «vento della notte»!

— L'11% non dà risposte o non le dà chiare.

— Il 5% dà varie risposte in metri.

Quasi tutti, aggiungono, non richiesta, la misura del perimetro.
Questo testo è stato proposto anche in II e III media, ed in I superiore ottenendo risultati percentuali analoghi (diciamo: dello stesso ordine di grandezza), con una costante accresciuta tendenza a far uso in modo apparentemente acritico di algoritmi formali.

Testo del secondo problema:

Antonio lavora dalle 21 di martedì alla 4 di mercoledì. Quante ore lavora?
Gianni studia dalle 21 di martedì alla 4 di giovedì. Quante ore studia?
Che differenza c'è tra i due problemi precedenti?

È stato proposto in classi di III, IV e V elementare.
Va subito detto che il testo propone una doppia situazione normalmente assai lontana dall'esperienza, il che significa lontana dalla possibilità di farsi un'immagine mentale basata sul vissuto; e, anzi, il II specialmente, rimanda ad una situazione che un bambino (ma anche un adulto) tende a classificare come impossibile o improponibile. Le discussioni nate (specie nella prima fase della ricerca) a questo proposito, però, proprio per questo sono state produttive.
La soluzione del problema richiede al bambino la capacità di dominare la misura convenzionale del tempo in ore nel momento in cui si passa da un giorno all'altro ed a quello successivo ancora ed in particolare di:

— sapere che un giorno dura 24 ore

— sapere contare in base ventiquattro

— saper contare le durate temporali (in questo caso l'ora).

— In III elementare risolve correttamente entrambi i quesiti lo 0%

— Svolgono bene il primo quesito, ma non il secondo, circa l'80% dei bambini dei quali: il 28% dà la stessa risposta (7 ore) sia al primo sia al secondo senza accorgersi della differenza di un giorno, mentre il 52%, pur accorgendosi di una differenza, aggiunge alle 7 ore un numero vario di ore senza dare una spiegazione esplicita. Tra i vari motivi individuabili vi è probabilmente anche il fatto che i bambini si confondono nel calcolare ed alcuni passano dalla base ventiquattro a quella dodici o a quella dieci.

— Il 20% circa dà risposte sc

rette ad entrambi i quesiti: l'8% in particolare inizia a contare dal numero dell'ora indicata nel testo, confondendo l'ora pensata come lasso di tempo con l'ora pensata come indicazione del momento del giorno (tant'è vero che *tra le 21 e le 24 vengono considerate* 4 ore: 21-22-23-24).

— In IV elementare risponde correttamente circa il 43%.

— Il 24% risponde bene al primo, ma aggiunge poi un numero vario di ore nel secondo.

— Il 9% invece risponde bene al secondo e male al primo includendo nel conteggio anche l'ora iniziale (8 ore invece che 7: ovviamente, allora, la risposta al II quesito è 32).

— Il 24% infine risponde scorrettamente ad entrambi i quesiti, compiendo errori di varia natura, riconducibili tuttavia in larga misura a quelli già individuati per la classe III.

— In V elementare risponde correttamente ad entrambi i quesiti solo il 29% circa dei bambini, mentre il 32% risponde bene al primo ma non al secondo poiché molti riportano lo stesso risultato di 7 ore (il 18% circa) o si limitano a raddoppiarlo (circa l'8%).

— Circa il 39% dunque sbaglia entrambi i quesiti (il 26% cercando di applicare formule nelle quali ricorre il numero 24 o tentando di applicare una delle quattro operazioni con i numeri *21* e 4 forniti).
È probabile che una delle cause di questa «caduta» nella capacità di risoluzione rispetto alla classe IV sia da addebitarsi al tentativo, fallito, di formalizzare i quesiti, compiuto da molti bambini di V (classe in cui, di solito, viene richiesta maggiormente tale capacità) a scapito di un ragionamento più intuitivo o descrittivo delle situazioni problematiche. A conferma di ciò abbiamo dato il testo in esame anche a ragazzi di I e II media ottenendo una assai più spiccata tendenza a soluzioni di tipo formale: 24—21=3; 24—4=20; e simili.

— È inoltre da sottolineare che oltre il 60% dei bambini asserisce che la differenza tra i due quesiti è *che nel primo c'è un personaggio* che lavora e nel secondo uno che studia, attribuendo così maggior rilievo al dato esperienziale rispetto a quello logico, oggetto della II prova. Tale tendenza permane anche nella scuola media ed in prima superiore (IPSIA); molte sono le risposte di questo tipo: «Che Antonio lavora e che Gianni studia».

3. PROBLEMI ARITMETICI

3.1. Problemi con una o più operazioni

È ben noto e diffuso tra gli insegnanti elementari un «criterio» per stabilire la complessità di un problema matematico: il numero delle operazioni necessarie a risolverlo. Questo «criterio» è addirittura sancito da programmi nazionali, in alcune occasioni. Per esempio, nei programmi del 1955 si suggerisce di passare da problemi contenenti una sola a più operazioni solo nel II ciclo (e, dapprima, aiutare l'alunno ponendo domande intermedie, cioè spezzando, per così dire, il problema complesso in una catena di problemi semplici, ad una sola operazione). Questo «criterio» è oggi assai poco condiviso da chi si occupa di didattica della matematica al livello primario; anzi, più ricercatori mostrano come non sia la quantità di operazioni presenti a determinare la difficoltà di un problema, ma una molteplicità di fattori.[4]

Un bell'esempio dovuto a Gérard Vergnaud[5] è il seguente, articolato in 3 esercizi:

E.1 *Intorno ad un tavolo ci sono 4 ragazzi e 7 ragazze. Quanti sono in tutto?*

E.2 *Giovanni ha speso 4 franchi. Egli ha ora in tasca 7 franchi. Quanti denari aveva prima?*

E.3 *Roberto ha giocato due partite. Nella prima partita ha perso 4 punti, ma alla fine della seconda si è trovato in vantaggio di 7 punti. Cosa è successo nella seconda partita?*

È notevole il fatto che tutti e tre i problemi si risolvono con l'uso della stessa semplice operazione: 4+7, il che vorrebbe dire che, in base al «criterio» di difficoltà detto sopra, essi hanno la stessa difficoltà. Viceversa, la difficoltà di E.1, E.2 ed E.3 è notevolmente diversa; pare che solo il 25% dei ragazzi di 11 anni, risolva E.3, mentre quasi il 100% dei bambini di 8 anni risolve E.1.

Queste considerazioni ci spingono a rifiutare il «criterio» detto sopra ed a valutare la complessità dei problemi matematici in tutt'altro modo (si veda: B. D'Amore, *Problemi*, cit. in bibl.).

Noi ci limiteremo, in questo terzo capitolo, a proporre problemi di aritmetica; uno di essi è quasi un banale esercizio, ma presenta un «distrattore»; uno è un problema

[4] Un testo base per iniziare lo studio di questa problematica sono alcuni articoli contenuti nella raccolta: L. Chini Artusi (a cura di), *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Zanichelli - UMI, Bologna 1985.

[5] G. Vergnaud, *A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems*, in: J.P. Carpenter - J.M. Moser - T.A. Romberg (a cura di), *Addition and subtraction*, Lawrence Erlbaum Ass. Inc., Hillsdale 1982, 39-59; riportato in E. Fischbein, *Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari*, in: L. Chini Artusi (a cura di), cit., pag. 123.

che si potrebbe chiamare di proporzionalità inversa; una coppia, infine, è stata proposta con lo scopo di verificare la «potenza strategica» di un aiuto grafico. Come abbiamo già scritto, le percentuali sono approssimate all'unità.

3.2. Esercizio con distrattore

Ad un pranzo per 8 persone sono stati preparati 24 pasticcini da dividere in parti uguali. Ma le persone arrivate a pranzo sono 12. Quanti pasticcini spettano a ciascuno?

In questo caso, proposto in III e V elementare, il bambino non deve lasciarsi «ingannare» dal dato inutile ed inoltre applicare ed eseguire in modo formalmente corretto l'operazione di divisione.
In III elementare dà una risposta corretta il 45% dei bambini, ma l'11% dopo aver fatto inutili calcoli (per es.: 24:8). Il 15% invece si confonde completamente ed opera con il dato distrattore (24:8) ignorando quello essenziale. Ciò potrebbe indicare una lettura affrettata e non completa del testo, lettura nella quale si ignora la seconda parte propositiva prima della domanda.
Interessante notare che un altro 15% pur impostando correttamente l'operazione (24:12) si sbaglia ad eseguirla, mentre il restante 25% circa propone operazioni non adeguate di risoluzione (per es.: 24×12 o 12−8 oppure 24:8=3 e poi 3×12,...).
In V elementare, del 73% che dà una risposta corretta, il 6% la dà dopo avere calcolato anche quanti pasticcini sarebbero spettati se le persone fossero rimaste 8.
Sembra di poter affermare che i solutori siano molto interessati all'intera vicenda dei pasticcini, più che a fornire la risposta «razionale» attesa; come se l'interesse venisse catturato dalla storia più che dal desiderio di rispondere in modo conciso e corretto. Dunque, non vediamo negativamente l'esecuzione dell'operazione inutile (da un punto di vista razionale adulto) 24:8 perché essa può essere pensata come un momento evolutivo di tutta la storia problematica, una specie di passaggio obbligato.
Il rimanente 27% sbaglia invece a scegliere la strategia risolutiva; il 15%, per esempio, propone la seguente: 24:8=3; 12:3=4 per cui i pasticcini spettanti ad ognuno sarebbero 4.

3.3. Problema di proporzionalità inversa

Tre operai fanno tutti i giorni un certo lavoro tutti insieme e ogni volta impiegano 6 ore. Ma uno di loro si ammala e non va a lavorare. Quel giorno, quindi, gli operai sono solo in due ma devono fare lo stesso lavoro. Secondo te impiegheranno più tempo o meno tempo? Perché? Calcola quanto tempo impiegheranno.

Al bambino viene richiesto di:
— cogliere intuitivamente la relazione inversa tra il numero degli operai ed il tempo impiegato per eseguire un dato lavoro.

— darne per iscritto una giustificazione.

— calcolare il tempo richiesto *fornendo in ogni caso un risultato* numerico che non si ponga in contrasto con la giustificazione espressa inizialmente.

Lo scopo di questo problema è infatti duplice:

— controllare se tutti i bambini capiscono che in una situazione del tipo detto, al diminuire della grandezza «numero degli operai» aumenta l'altra grandezza «numero delle ore impiegate a fare lo stesso lavoro», verificando, nel contempo, che alla fine ci sia congruenza tra questa intuizione e la risposta numerica data; per esempio se un bambino afferma che le ore aumentano e poi trova come risultato un numero di ore inferiore a 6, non c'è congruenza;
— analizzare che tipo di strategia i bambini mettono in atto per rispondere; è ovvio che una proporzione da scuola media del tipo:

$$X : 6 = 3 : 2$$

(o simile) non può essere sfruttata da bambini di scuola elementare, per lo meno non in forma consapevole; è dunque interessante vedere come ingenuamente essi cercano di trovare una soluzione coerente con il problema.

In III elementare il 33% procede formalmente in questo modo: 6:3=2 (ore impiegate da 1 operaio) → 6+2=8 (ore impiegate da 2 operai); mentre l'11% circa calcola 6:3=2 e poi 6×2=12 per ottenere il tempo occorso. Notevole la logica della prima soluzione che rispecchia una «strategia additiva»; il bambino comprende che le ore devono aumentare ed intuitivamente interpreta l'aumento con l'addizione che ne è la forma più elementare. In tal senso anche l'uso della moltiplicazione potrebbe avere lo stesso tipo di giustificazione.
Del restante 56%: l'11% non risponde; il 45% non fornisce giustificazioni o afferma che il numero delle ore resta uguale, ma dà risultati numerici che indicano un tempo, per svolgere il lavoro, minore (6:3=2 → 6−2=4 oppure *6:3=2 → 2:1=1 → 1+2=3; ...*).

In V elementare quasi il 50% dà risultati contraddittori rispetto alle giustificazioni fornite. Questo dato deve essere ancora analizzato approfonditamente ma certo, ad una prima osservazione, sembrerebbe non molto diffusa tra i bambini l'abitudine di rileggere criticamente, alla fine, il testo complessivo confrontando l'attesa con il risultato ottenuto.
Per quanto riguarda le strategie operative, il 20% propone: 3×6=18 → 2×6=12 affermando, in contrasto con quanto intuito, che le ore impiegate dai 2 operai sono di meno; il 6% invece

esegue 6×3=18 → 18×2=36 da cui risulta un tempo impiegato maggiore; il rimanente 74% esprime strategie varie del tipo: 6:3; 6:2; 6×2; 2×4;... Bisogna sottolineare che il tentativo di «tradurre» immediatamente il testo del problema in una espressione aritmetica è molto più elevato in V che non in III; ciò sembra dovuto al fatto che gli insegnanti, in vista del passaggio alle medie, lavorano molto in questa direzione: purtroppo spesso il risultato ottenuto è di confusione dal momento che i formalismi aritmetici non sono ancora posseduti nel profondo. Una «sana» attività di risoluzione intuitiva «a spanne» è da consigliare sempre.

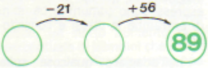
3.4. L'uso dei grafici aiuta nella risoluzione dei problemi aritmetici?

Sempre prendendo a prestito un celebre esempio di Vergnaud, ne abbiamo elaborato un altro del tutto identico sul piano logico, ma diverso per numeri contenuti ed oggetti in gioco:

A - *Michele ha un cestino di caramelle. Sua mamma Agnese prende 12 caramelle di Michele per darle a una signora. Suo papà Giuseppe porta a Michele altre 9 caramelle. Ora Michele ha 63 caramelle in tutto. Quante ne aveva all'inizio?*

B - *Giovanni raccoglie figurine di calciatori. Suo fratellino Andrea, senza volere, gliene perde 21. Allora il papà compra a Giovanni altre 56 figurine. Così, ora, Giovanni ha 89 figurine in tutto.*
Quante figurine aveva all'inizio?

[Si noti la prolissità dei testi, l'eccesso dei dettagli ("senza volere"), la ripetizione dei nomi; solo dopo un lungo lavoro di rifacimento del testo, questo è apparso accettabile, ed effettivamente è poi andato benissimo a tutti gli altri bambini che non avevano partecipato alla messa a punto].
Ad un campione di bambini di III elementare abbiamo dato il testo A privo di indicazioni grafiche; successivamente, allo stesso campione abbiamo dato il testo B accompagnato dal seguente schema:



Ad un altro campione di bambini, sempre di III elementare, abbiamo *dato il testo B accompagnato* dallo schema e successivamente il testo A, privo di schema.
Volevamo verificare se, ma soprattutto *in che misura, la presenza* di uno schema grafico aiuta nella soluzione; ed inoltre se il bambino si appropria della strategia grafica fornita e *la riutilizza in* altri contesti problematici in modo opportuno.
I risultati sono i seguenti:

- Il testo A, consegnato per primo, è stato risolto nel 17% dei casi; il testo B nel 60%.
- Il testo B, consegnato per primo, è stato risolto nel 63% dei casi; il testo A nel 46%.

Si può dunque desumere che *circa il 60-63% dei precedenti bambini* risolve il problema con l'aiuto dello schema e che l'aver operato con lo schema permette di *aumentare la percentuale, dal 17 al* 46%, di coloro che riescono a risolvere il problema A.
C'è però da sottolineare un fatto *accaduto in seguito. Dopo aver* proposto il testo A, con scarso successo, ed il testo B, con successo nettamente migliore, abbiamo provato a sottoporre ai bambini il problema pubblicato nel *2° capitolo* (quello sul calcolo delle ore); diversi bambini, ancor prima di leggerlo, nello spazio riservato alla risoluzione hanno disegnato loro stessi lo schema grafico utilizzato nei problemi precedenti per poi dedicarsi inutilmente a cercare i numeri da mettere nei riquadri... Il bambino è conservatore, è vero; ma la scuola spesso crea stereotipi!
Le attività di risoluzione dei problemi sembrano invece favorevolmente influenzate da una grande varietà di stimoli. Grande importanza ha pure la motivazione; l'esercizio risolto per forza, il problema non attraente hanno certo un destino negativo.
La nostra è, per ora, soprattutto la narrazione di una ricerca ancora in corso della quale diamo solo alcuni cenni; prima o poi, terminato il lavoro, cercheremo di trasporla sul piano didattico operativo. In questa fase del lavoro la presenza di problemi troppo difficili o nei cui testi si introducono sostantivi che i bambini non conoscono potrebbe quindi essere giustificata. *Tuttavia entrambe le* modalità non stonano con quanto banalmente detto poche righe sopra (incentivazione sia della motivazione, *sia della spinta a creare* sempre strategie nuove e personali): come si sa, l'analisi dell'errore e della sua tipologia è rivelazione *fondamentale per la pratica* educativa e per la evidenziazione dei percorsi di insegnamento/apprendimento, specie, ci pare, in *campo matematico.*
(Una trattazione anche teorica molto più particolareggiata su questi temi si trova nel primo dei testi citati in bibliografia).

4. PROBLEMI GEOMETRICI

4.1. La presenza della geometria nella didattica primaria

Ci pare che la geometria sia perennemente assente nella pratica educativa elementare; a fondamento popolare di ciò sta il «saper leggere, scrivere, far di conto» che ancora talvolta sembra caratterizzare le richieste che la società rivolge ai maestri; da un punto di vista burocratico-storico il fatto che l'Italia unita abbia avuto in passato addirittura programmi uf-

ficiali senza la presenza della geometria.
Dunque: nella didattica della matematica si tende (storicamente e di consuetudine) a privilegiare gli aspetti aritmetici.[6]
Sia per ... recuperare la tradizione, sia perché a nostro avviso la geometria ha una portata educativa enorme, noi dedichiamo, nel nostro progetto elementare[7] moltissima attenzione alla geometria (senza trascurare ovviamente le altre discipline matematiche).
Anche per quanto concerne la risoluzione di problemi, abbiamo dedicato tempo e lavoro a problemi a carattere geometrico (la distinzione non è sempre facile...; diciamo: a prevalente carattere geometrico). E questo vale anche per le esperienze compiute nella scuola media. In questo articolo presenteremo sia alcuni quesiti proposti a classi del II ciclo della scuola elementare sia i risultati ancora incompleti (ma già abbastanza ben delineati) di un testo proposto al termine della scuola media, come confronto e per dimostrare che certe acquisizioni molto elementari e molto profonde devono essere acquisite per tempo.

4.2. Introduzione del termine circonferenza

Quella che vedi disegnata è una circonferenza.
Misura la sua lunghezza. Puoi usare come strumento quel che vuoi.

Qui sotto scrivi come hai fatto.

È stato proposto in III e IV elementare per analizzare le strategie risolutive spontànee dei bambini che non hanno ancora avuto occasione didattica di affrontare formalmente questo argomento.
Le statistiche sono ancora numericamente poco consistenti quindi ci limitiamo a dare alcune tra le indicazioni più significative che sembrano emergere.
A parte qualche caso originale, la maggioranza dei tipi di strategie espressi sono comuni ai bambini di entrambe le classi e consistono:

— nell'adagiare qualcosa sulla circonferenza (ad esempio il metro di fettuccia, della carta,...), dando poi come misura quella di un segmento ottenuto rettificando la circonferenza. A questo scopo un bambino ha addirittura inventato uno strumento apposito: lo «stendicerchi»!

— nel fare scorrere sulla circonferenza il righello

— nel contare i quadretti attraversati dalla circonferenza

— nel misurare il diametro e a volte nel moltiplicarlo per 2

— nell'usare il goniometro fornendo spesso la misura dell'ampiezza della circonferenza in gradi e rispondendo così ad una domanda diversa da quella richiesta ma che alcuni bambini hanno voluto ugualmente dare.

Tra le soluzioni vogliamo segnalare quella fornita da un ragazzo di I media (di un grosso paese in provincia di Ferrara) che ha proposto di far uso di: righello, compasso e cronometro. Prima si disegna la circonferenza con il compasso, misurando il tempo necessario con il cronometro. Poi si disegna un segmento di misura unitaria con il righello. Poi si paragonano i tempi: il rapporto tra essi dà il rapporto tra lunghezze:
tempo di esecuzione disegno circonferenza (noto) :
tempo di esecuzione disegno segmento (noto) =
= lunghezza circonferenza (incognita) :
lunghezza (unitaria, nota) del segmento.

4.3. Area di una figura non standard

Trova l'area di questa figura:

Scrivi qui sotto come hai fatto.

Proponendo tale situazione problematica si intendeva:

— verificare la comprensione profonda dell'idea di area

— analizzare le strategie risolutive utilizzate dai bambini.
In III elementare il 56% si avvale del conteggio (per eccesso) dei quadretti contenuti nella figura; il 25% cerca di trovare la soluzione impostando delle formule: il 6% base + base + altezza; il 19%: base + altezza o base + base + altezza + altezza; *tutti* però danno il risultato in misure lineari. Il restante 19% sembra limitarsi a misurare solo i lati obliqui.

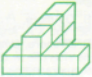
In V elementare l'80% cerca la soluzione mediante formule: il 40% moltiplicando misure lineari, spesso chiamate «diagonali», senza peraltro indicarle, e dividendo o moltiplicando il prodotto per 2; l'altro 40% moltiplicando la base per l'altezza ed aggiungendo al risultato la misura (lineare) di un lato o di due lati obliqui. Il restante 20% misura il perimetro invece

[6] E che dire della classica confusione che molti fanno tra «aritmetica» e «matematica», di fatto dimenticando la geometria?
[7] Si tratta del Progetto Ma.S.E.; gli aspetti teorici (in 11 volumi) sono stati pubblicati da Angeli ed., Milano, tra il 1986 ed il 1993; i 5 quaderni operativi redatti da un gruppo di insegnanti sono stati pubblicati da Armando ed., Roma, tra il 1987 ed il 1991 (Matematica 1, ..., Matematica 5).

che l'area, ma lo esprime in cm^2. Da notare la grande quantità di bambini che danno la misura dell'area in cm, segno possibile, oltre che di un eventuale disattenzione, anche di una mancata interiorizzazione.

4.4. Immaginazione ...a cubetti

Quanti cubetti ci vogliono per realizzare questa figura?



Scrivi la risposta qui sotto e, se vuoi, spiega come hai fatto a trovarla.

Questo quesito (o altri analoghi) è stato sottoposto ad un campione di bambini di III e V elementare: essi dovevano prima rispondere e successivamente verificare la risposta costruendo concretamente la figura con cubetti di legno (5×5×5 cm). Con un altro campione di bambini, sempre di III e V, si è invece proceduto in senso inverso: date a loro, in tempi successivi, due figure di composizioni diverse, essi dovevano prima costruirne una concretamente e poi, senza alcuna prova fattiva, individuare il numero dei cubetti dell'altra.

Si voleva in questo modo analizzare:

— la capacità del bambino di «vedere» tridimensionalmente e da tutti i punti di vista anche quando l'oggetto (in questo caso una costruzione) è rappresentata bidimensionalmente su un foglio e quindi una parte di esso è esclusa alla vista

— quanto incidesse su questa capacità di «visione» la possibilità di avere *precedentemente* operato concretamente con costruzioni analoghe a quelle disegnate.

Allo stato attuale della ricerca si può già indicativamente individuare, come del resto era prevedibile, un netto aumento della percentuale di bambini che danno risposte corrette dopo aver operato concretamente, anche senza far più uso di cubetti in modo concreto.

Senza volere anticipare riflessioni teoriche che non possono essere approfondite in questa sede (e che faremo altrove) pensiamo tuttavia sia il caso di sottolineare come i dati emergenti possano dimostrare che la via del «laboratorio didattico di matematica» in senso lato, da noi già da anni tracciata, possa considerarsi vincente per fondare le basi anche di una profonda intuizione geometrica. Con ciò, naturalmente, non si intende limitare alla sola esperienza concreta il «vedere geometrico» od il «fare matematico» ben consapevoli di quanto sia necessaria una didattica che preveda anche attività che stimolino la capacità di intuizione e di immaginazione senza una costruzione vera e propria.

4.5. Area e perimetro nella scuola media

Stiamo conducendo una serie di prove a carattere geometrico nella scuola media; le proponiamo qui perché il livello delle proposte è estremamente elementare e, di primo acchito, sembra più adatto alla scuola precedente.

L'esperienza si è svolta in una II ed in una III media di un paese a 10 km da Bologna, caratterizzato da un'espansione enorme avvenuta negli ultimi anni, grazie ad un'immigrazione massiccia da varie parti d'Italia e dai paesi extracomunitari; la preparazione scolastica profondamente acquisita sembra essere minima: la scuola media non riesce a migliorare in modo consistente le conoscenze di base individuali.

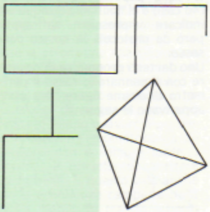
Non forniamo dati statistici, considerato il valore basso del cardinale della popolazione esaminata (40 casi) e ci limitiamo dunque ad indicare «impressioni» suffragate però da protocolli in nostro possesso.

Uno dei testi proponeva di colorare con il pennarello rosso il perimetro di alcune figure;[8] tra esse apparivano le seguenti:

In grande quantità, i ragazzi hanno colorato con il pennarello rosso tutto quanto era colorabile, indipendentemente dal fatto che alcune figure fossero o no chiuse e mostrando di aver inteso sì che il perimetro ha qualche cosa a che fare con il lineare, ma non pren-

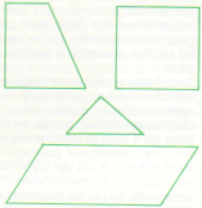
[8] Spesso con perimetro si intende la misura lineare del contorno di una figura piana chiusa, ma i ragazzi tendevano ad identificare i due termini «perimetro» e «contorno»; poiché si voleva misurare la risposta allo stimolo «comprensione del concetto di perimetro», abbiamo evitato eccessiva precisione nell'uso della terminologia e ci siamo adattati al linguaggio dei ragazzi, per essi più immediato.

dendo in esame il solo caso delle figure chiuse.
Lo stesso test richiedeva di colorare con il pennarello verde l'area di altre figure,[9] tra le quali queste:



Manifestando un certo imbarazzo per i disegni nei quali appariva qualche diagonale, i casi più clamorosi (ma non rari) sono stati quelli di ragazzi che hanno colorato figure aperte, creando essi stessi, di fatto, una chiusura, per esempio:

Prove analoghe sono state fatte anche in prima superiore, con risultati non troppo dissimili, specie per quanto concerne le identità: «perimetro=lineare» (indipendentemente dal contorno), «area=parte interna» (anche nel caso di figure aperte: in tal caso la figura è idealmente chiusa con il segmento che realizza la chiusura nel modo più semplice).
Sembra opportuno ribadire che la distinzione lineare-superficiale, perimetro-area, liquidata spesso nella scuola elementare in poche battute, merita ben altro livello di attenzione nella didattica.
Anche la terminologia merita attenzione; è pur vero che essa non fornisce idee, ma certo dà strumenti.
In altre occasioni abbiamo chiesto ad alcuni ragazzi di indicare quale delle seguenti figure fosse un esagono regolare:[10]



Ebbene, pur nella evidente assenza, una fetta percentualmente consistente ha voluto a tutti i costi evidenziare qualcosa, rifiutandosi di dare come risposta la più ovvia: «Non ce n'è alcuno» (o simili). Tutto ciò fa emergere un altro tipo di problema di ordine più psicologico che matematico: alle domande degli insegnanti si deve rispondere, non importa che cosa o come. È meglio rispondere sbagliando (comunque, ci si può sempre ...«azzeccare», con un po' di fortuna) che non rispondere o rispondere con buon senso invece che con formalismi. Ciò denuncia un clima sociale (beninteso: non sempre) che certo non favorisce dialogo e comprensione, specie in didattica della matematica (che, a nostro avviso, deve rendere abili a fare congetture, piuttosto che dare solo certezze da ingurgitare in modo acritico).

5. PER CONCLUDERE

Sarebbe troppo facile (e forse banale) concludere che per fare bene matematica occorre fare matematica bene. In realtà ci si accorge che le variabili in gioco sono tante: sociali, affettive, attentive, motivazionali...
Tutto ciò è tenuto in debito conto nella pratica educativa generale, ma troppo spesso NON nella matematica, quasi come se questa disciplina fosse avulsa dal contesto umano. Ed invece a noi sembra che proprio qui si gioca la partita degli esclusi dal mondo matematico e per i quali sembra possa farsi sempre meno... Creare simpatia e fiducia è, invece, necessario per la matematica, permettendo ad ogni allievo un approccio personale e creativo.

Riferimenti bibliografici

(oltre a quelli fatti nelle note a piè pagina)

B. D'Amore, *Problemi*, Progetto MaSE, vol. X A, Angeli, Milano 1993.
B. D'Amore, *Una panoramica su alcune ricerche in corso*, pubblicato contemporaneamente su: 1. «Cahiers de didactiques de Mathématiques», Salonicco, Grecia, in greco e francese; 2. «Suma», Granada, Spagna, in castigliano; 3. «L'Educatore», Milano, Italia, in italiano, con il titolo *Novità nella didattica di matematica*, n. 4 - 1° ottobre 1992.
B. D'Amore - P. Sandri, *Fa' finta di essere... Indagine sui processi di de- e ri- contestualizzazione, estraniamento e modellizzazione del reale per la costruzione esplicita consapevole delle rappresentazioni esterne dei problemi...*, in corso di stampa.
P. Sandri, *Per una didattica del tempo convenzionale*, «La Scuola Se», Milano, giugno 1993, n. 10, Dossier, pp. 16-21.
B. D'Amore - P. Sandri, *Interventi spontanei a completamento di dati mancanti. Una prova sulla devoluzione di una situazione a-didattica*, in corso di stampa.

[9] Vale un discorso analogo al precedente circa la terminologia.
[10] Non entriamo nel contesto della richiesta: qui essa appare assurda o irragionevole; viceversa, nel contesto della ricerca, essa aveva un ben preciso e coerente senso.